Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT GÉNÉRAL : *Cette épreuve est formée de quatre exercices de difficulté croissante. Ces exercices sont indépendants sauf les exercices III et IV.*

Il sera accordé une grande importance au soin apporté par les candidats à la rédaction de leur copie.

I

On note E la partie de $\mathbf{R}^n$ formée des points $m = (X_1, ..., X_n)$ tels que $X_1 \geqslant 0, ..., X_n \geqslant 0$ et $X_1 + ... + X_n = 1$.

1° Soit F la forme quadratique telle que

$$F(m) = F(X_1, ..., X_n) = \sum_{i \neq j} X_i X_j$$

Calculer la borne supérieure des valeurs de F sur E.

2° Soit A une partie de $\{ 1, 2, ..., n \}^2$ telle que :

1. $(i, i) \notin A$ pour $i = 1, 2, ..., n$
2. $(i, j) \in A \Rightarrow (j, i) \in A$

On pose

$$F_A(m) = F_A(X_1, ..., X_n) = \sum_{(i,j) \in A} X_i X_j .$$

Calculer la borne supérieure des valeurs de F_A sur E.

(On pourra commencer par démontrer que si $i \neq j$ et $(i, j) \notin A$, alors cette borne supérieure est atteinte en un point $(X_1, ..., X_n)$ où $X_i X_j = 0$).

II

On désigne par V un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ sur un corps commutatif k. On appelle *drapeau* une suite $d = (V_0, V_1, ..., V_n)$ de sous-espaces vectoriels de V tels que

$$V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n$$

et dim $V_i = i$ pour $i = 0, 1, ..., n$

(en particulier $V_0 = \{ 0 \}$, $V_n = V$).

a. Soient $d = (V_0, V_1, ..., V_n)$ et $d' = (V'_0, V'_1, ..., V'_n)$ deux drapeaux; on pose $A_{ij} = V'_i + V_j$; pour $i = 1, ..., n$, on note $s_{d,d'}(i)$ le plus petit entier j tel que $A_{i,j} = A_{i-1,j}$.

Montrer que $s_{d,d'}$ est une permutation de $\{ 1, ..., n \}$.

b. On dit qu'une base B de V est *adaptée* à d si chacun des sous-espaces V_i est engendré par une partie de B.
Démontrer qu'il existe une base de V adaptée à la fois à d et d'.

c. Soit Δ l'ensemble des couples de drapeaux et G le groupe des bijections linéaires de V.

Décrire l'ensemble quotient de Δ pour la relation d'équivalence pour laquelle deux éléments (d, d') et (e, e') de Δ sont équivalents s'il existe un élément g de G tel que $g(d) = e$, $g(d') = e'$ (on désigne par $g(d)$ le drapeau $(g(V_0), g(V_1), ..., g(V_n))$, et de même pour $g(d')$).

III

Soit n un entier > 0. On note $E(n)$ l'ensemble des matrices carrées A d'ordre n à coefficients réels telles que l'ensemble des matrices semblables à A (c'est-à-dire de la forme $P^{-1}AP$) et qui commutent à A soit fini.

a. Montrer que si les valeurs propres (aussi bien réelles que complexes) de A sont toutes distinctes, alors A appartient à $E(n)$.

b. On suppose $n = 2$; quels sont les autres éléments de $E(n)$?

c. Même question pour $n = 3$.

IV

Avec les notations de III, que peut-on dire de $E(n)$ lorsque n est un entier quelconque?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail